818. Mannigfaltigkeit ヘノ連續變換 II

小松醇郎（阪大）

前談話[1]デハ Hindernis ノ定義ニハ $\pi^{r+1}(M^n)$ ニ關スル "simple" ガ必要且ツ十分ト書イタ。シカシ之レハ Hindernis ノ定義ノ仕方ヲ變ヘレバ simple ノ條件ナシデ同樣ナ取扱ヒヲナスコトガ出來ル。又 §2 デハ M^n ニ關シ何等ノ假定ヲ書カナカッタガ矢張リ $\pi^{n-1}(Z^{n-1})$ ニ關スル "simple" ヲ要スル。精シクハ $\pi^{n-1}(Z^{n-1})$ ノ部分群 $\lambda^{n-1}(Z^{n-1})$（後出）ニ關スル simple ノ條件ダケデ充分ナノデアル。コノ條件ガアレバ前談話 §IV ノ定理ハ M^n ガ S^n ト異ナルベッチ數ヲ持ツト云フ條件ヲ省イテソノマヽ成立スル。

又前デハ M^n orientierbar トシタガ此ノ條件ハ不要デアル。

§1. M^n 及ビ Z^{n-1} ノ Homotopiegruppe.

$y_0 \in Z^{n-1} \subset M^n$ ヲ指定スル点トスル。Z^{n-1} ノ作リ方カラ

$$i < n-1 \text{ ノトキ } \quad \pi^i(Z^{n-1}) \approx \pi^i(M^n)$$

$i \geqq n-1$ ノトキハ $\alpha \in \pi^i(Z^{n-1})$, 且ツ $\alpha \neq 0$ ナル元デ, M^n デハ homotop 0 ナルモノ存在スル。今 M^n デ homotop 0 ニナル所ノ $\pi^i(Z^{n-1})$ ノ元凡テヲトレバ是レハ明カニ $\pi^i(Z^{n-1})$ ノ部分群 $\lambda^i(Z^{n-1})$ ヲ

---

1) 本誌第188号，500P.

作ル．故ニ

$$i \geqq n-1 \text{ ノトキ } \pi^i(Z^{n-1}) - \lambda^i(Z^{n-1}) \approx \pi^i(M^n).$$

$S^n \to M^n$ ヘ wesentlich auf デ移ル abbildung ノウチソノ Grad ノ最小數 C ガ存在スル。M^n ノベッチ數 $p^i > 0$ $(n > i > 0)$ ナラバ $C = 0$ デアル。M^n ノ Torsion m' 存在スルナラバ Grad C ハ少クモ m' デアル。

<u>定理1.</u>　$\lambda^{n-1}(Z^{n-1})$ ハ整數 mod C ノアーベル群ニ homomorph auf ニ對應サレル。

<u>証明:</u>　$\alpha \in \lambda^{n-1}(Z^{n-1})$ ヲ與ヘル連續変換 $f: S^{n-1} \to Z^{n-1}$ トスル。$\dot{E}^n = S^{n-1}$ トスレバ f ハ E^n マデ M^n ヘ erweitern 出來ル。$F: E^n \to M^n$ ハ grad m ヲ與ヘル。Grad m ハ mod. C デ eindeutig デアル。eindeutig デナイトスレバ $f: S^{n-1} \to Z^{n-1}$ ヲ E^n ニ erweitern シテ $F': E^n \to M^n$ トシソノ Grad m' $(\neq m)$ トスル．二ツノ E^n ハ Rand ノ S^{n-1} デ Abbildung f ハ identisch．合セルト S^n．連続変換 F 及ビ F′ デ $S^n \to M^n$ ガ考ヘラレ、ソノ Grad ハ C ノ倍數．然ルニコレハ $m - m'$ デアル。

$$\therefore \quad m \equiv m' \quad \text{mod. } C$$

對應 $\alpha \to m$ ハ Homomorphismus デアル。

$\alpha \to 1$ ナル element $\alpha \in \lambda^{n-1}(Z^{n-1})$ ハ必ズ存在スル。

—— 以上 ——

$C=1$ ナラバ $\lambda^{n-1}(Z^{n-1})=0$ デアル。斯様ナ M^n ハ S^n 以外ニ存在スルカ．S^n ト homotopie type ヲ等シクスルト思フ。証明ハ出来ナイ。

<u>定理2.</u> $\lambda^{n-1}(Z^{n-1})$ ガ Simple デアルタメノ必要且ツ充分ナ條件ハ Homomorphismus h ガ isomorph ナルコトデアル。

<u>証明:</u> isomorph ナラバ Simple デアル。

$\alpha, \beta \in \lambda^{n-1}(Z^{n-1})$, $\alpha \neq \beta$ ナラバ

$h(\alpha) \neq h(\beta) \mod. C$

Grad ガ異ルナラバ α, β ハ Z^{n-1} S^{n-1} デ異ル Komponent ニゾクスル。

次ニ isomorph デナイナラバ Simple デナイ。

Homomorphismus h ノ Kern ノ element α, $\alpha \neq 0$ ガ存在スル。$f: S^{n-1} \to Z^{n-1}$, $\dot{E}^n = S^{n-1}$, $F(E^n) \subset M^n$. $F(E^n)$ ノ Grad 0. M^n 内ノ一点 p ヲトリソノ近傍（又ハ n 単体）$V(p)$. F ニヨル Urbild ヲトレバ $V_1, V_2, \cdots\cdots, V_i$ デ Grad ハ夫々 $\pm$ デ Summe ハ 0 ニナル。M^n デ p ヲ中心トシ $V(p)$ ノ Rand ヲ Z^{n-1} ニ Verschieben スル．E^n デハ $V_1, \cdots\cdots, V_i$ ノ内部ヲ除キ凡テ Z^{n-1} ニ移ル．且ツ S^{n-1} デハ元ノ f ト変ラナイ。

$$E^n - \sum_i V_i \to Z^{n-1}$$

$\lambda^{n-1}(Z^{n-1})$ Simple ダトスレバ $V_i \to Z^{n-1}$ ハ夫々 $Z^{n-1}S^{n-1}$ ノ点デアッテ $\lambda^{n-1}(Z^{n-1})$ ノ元ヲ表ス。且ッ $\sum_i V_i \to Z^{n-1}$ ハ $\lambda^{n-1}(Z^{n-1})$ ノ 0 元ニナル。ソノ元ハ然シ $\dot{E}^n(=S^{n-1}) \longrightarrow Z^{n-1}$ ノ元ノ逆元デ一 α デアル。$\alpha \neq 0$ トシタ。コノ矛盾ヨリ $\lambda^{n-1}(Z^{n-1})$ ハ simple デナイ。

―― 以上 ――

前談話（814）ノ（II）ノ oberer Zyklus ハソレ故一ッノ Hindernis ト考ヘラレル。$f: K^n \longrightarrow M^n$. $f(K^{n-1}) \subset Z^{n-1}$.

T_i^n ニ對シ $f(\dot{T}_i^n) \subset Z^{n-1}$, $f(T_i^n) \subset M^n$. 故ニ Grad m_i ヲ求メ $f^n: T_i^n \longrightarrow m_i$ トシタ。然シ此ノ m_i ハ、$\dot{T}_i^n \subset Z^{n-1}$ ヨリ $\lambda^{n-1}(Z^{n-1})$ ノ一ッノ元 α_i デアッテ Homomorphismus h デ $h(\alpha_i) = m_i$.

$$T_i^n \longrightarrow \alpha_i, \quad \alpha_i \in \lambda^{n-1}(Z^{n-1})$$

ナル 0-Zyklus ニ Homomorphismus h ヲ施シタモノデアル。$\lambda^{n-1}(Z^{n-1})$ simple ナラバ Hindernis デアルカラ、$f: K^{n+1} \longrightarrow M^n$ デ同様ニ定義シタ代數複体ハ 0-Zyklus デアル。即チ前談話（IV）ノ定理ノ假定、M^n ガベッチ數 $p^i > 0$ $(n > i > 0)$ ヲ持テバ、ノ假定ガナクテモ、ソレハ 0-Zyklus ノ Homomorphes Bild ダカラ 0-Zyklus トナル。

§II. 一般ノ Hindernis

$K^m \supset K^r$. 一回 baryzentrisch ニ unterteilen サレタモノトスル. $K^r \xrightarrow{f} M^n$, 且ツ $f(K^0) = y_0 \subset Z^{n-1} \subset M^n$. $f: \dot{T}_i^{r+1} \longrightarrow M^n$. $\pi^r(M^n)$ ノ元ハ一意デハナイ。

今 T_i^{r+1} ノ頂点ハ凡テ unterteilen サレナイ前ノ Komplex ノ重心デアル. 最高次元ノ重心デアツタ頂点ヲ x_0 トシ $\dot{T}_i^{r+1} \xrightarrow{f} M^n$ ノトキ Homotopiegruppe $\pi^r(M^n)$ ノ元ヲ x_0 ニ関シ定メル. ソレヲ $\alpha_i \in \pi^r(M^n)$. $f^{r+1}: T_i^{r+1} \longrightarrow \alpha_i$ ハ代数複体デアル。

K^m ニ於ケル Operator g_0 ヲ更エテ Überdeckung ヲトル. $T_i^{r+1} > T_j^r$ トシ T_j^r ノ頂点ノウチ最高次元ノ重心ヲ x_0' トス。$x_0 = x_0'$ ナラバ $\pi^r(M^n)$ ノ Identisch ナ Automorphismus γ_I. $x_0 \neq x_0'$ ナラバ Strecke $\overrightarrow{x_0 x_0'}$ ハ連続変換 f ニヨリ M^n ノ一ツノ閉道 w ニ移ル. w ハ $\pi^r(M^n)$ ノ一ツノ Automorphismus γ_w ヲ起ス、即チ Inzidenz Relation $[T_i^{r+1}, T_j^r] = \gamma_{ij}^r$ ヲ與ヘル。

同様ニ $\left[T_k^{r+2}, T_i^{r+1}\right] = \gamma_{ki}^{r+1}$ ガ定マル。

<u>補助定理</u>. $\gamma_{ki}^{r+1}\gamma_{ij}^{r} = \gamma_{kl}^{r+1}\cdot\gamma_{ej}^{r}$

<u>証明</u>

$$\begin{tikzcd}
 & T_i^{r+1} \arrow[dr] & \\
T_k^{r+2} \arrow[ur] \arrow[dr] & & T_j^r \\
 & T_e^{r+1} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

頂点デ表ハセバ

$$\begin{tikzcd}
 & x_i \arrow[dr, "w_{ij}"] & \\
x_k \arrow[ur, "w_{ki}"] \arrow[dr, "w_{kl}"'] & & x_j \\
 & x_l \arrow[ur, "w_{ej}"'] &
\end{tikzcd}$$

閉道 $x_k x_i x_j x_e x_k$ ハ一ツノ單体 T_k^{r+2} ニアル．故ニ homotop 0 in K^2． ソノ f ニヨル Bild モ勿論 homotop 0． 故ニ $w_{ki}w_{ij}$ ト $w_{kl}w_{ej}$ トハ M^n ノ中デ $\pi^r(M^n)$ ノ等シイ元ヲ表ス．從ツテソレガ作ル，$\pi^r(M^n)$ ノ Automorphismus ハ等シイ。

—— 以上 ——

<u>定理3</u>．代數複体 $f^{r+1}: T_i^{r+1} \longrightarrow \alpha_i$ ハ 0-Zyklus デアル。

<u>定理4</u>．$K^r \xrightarrow{f} M^n$ ナル連續変換ガ K^{r+1} マデ erweitern 出來ルタメノ條件ハ Hindernis $f^{r+1} \equiv 0$

<u>定理5</u>．$K^r \xrightarrow{f} M^n$ ヲ K^{r+1} ニ任意ニ Erweitern シテ，$F: K^{r+1} \longrightarrow M^n$，$F': K^{r+1} \longrightarrow M^n$ トシタトキニツノ 0-Zyklus $f^{r+2} \sim f'^{r+2}$ デアル。茲ニ Homologie ハ $K^2 \xrightarrow{f} M^n$ デ定マル Überdeckung ノ意味ニ於テデアル。

前談話 §3 ノ定理ハアノママデハ M^n，$\lambda^{n-1}(Z^{n-1})$ ノ simple ヲ要スル．然シ Simple ノ條件ナシデモ此処ノ Überdeckung ノ Begriff ヲ使フナラバ成立スル。K^n ニ Überdeckung ノ意味ニ於ケル 0-Zyklus ガ存在スル．從ツテ此ノ場合ハ普通ノ 0-Zyklus ガ存在スルト結論サレル。